Везде в этой задаче рассматриваются многочлены с действительными коэффициентами, причем старший коэффициент многочлена степени *n* считается не равным нулю.

1) Пусть даны некоторые многочлены *f*1(*x*), *f*2(*x*), …, *fn*+1(*x*), различных степеней (от 0 до *n*). Показать, что, используя операции суммы (разности) многочленов *f*(*x*) ± *g*(*x*) и умножения многочлена на число *с⋅f*(*x*), где *с* – произвольная действительная постоянная, из совокупности многочленов *fi*(*x*) можно получить произвольный многочлен степени не выше *n*. (Здесь и далее под многочленами *f*(*x*) и *g*(*x*) может пониматься как любой из первоначально заданных многочленов, так и произвольная уже полученная их комбинация)

2) Пусть даны некоторые многочлены *f*1(*x*), *f*2(*x*), …, *fk*(*x*), где  не обязательно различных степеней (от 0 до *n*). Установите, какое множество многочленов, можно получить из такой совокупности многочленов *fi*(*x*), используя операции пункта 1). Можно ли получить из указанной совокупности произвольный многочлен степени не выше *n*?

Исследование этого пункта можно начать с частных вариантов, например:

Пусть изначально заданы многочлены *f*1(*x*) = *x*2 – 1 и *f*2(*x*) = *х* – 1. Опишите множество многочленов, которые можно из них получить, используя указанные операции.

Тот же вопрос для многочленов *f*1(*x*) = *x*2 + 2*х* + 1 и *f*2(*x*) = *х* – 1.

Тот же вопрос для многочленов *f*1(*x*) = *x*2 + 2*х* + 1 и *f*2(*x*) = *х*2 – *х*.

Под «описанием» множества многочленов можно понимать различные общие свойства этого множества, выполнение которых будет являться необходимым и достаточным условием принадлежности конкретного многочлена рассматриваемому множеству. Исследуйте с этой точки зрения такие свойства или их совокупности: описание совокупности корней, которыми могут обладать многочлены, принадлежащие этому множеству, описание подмножеств многочленов фиксированной степени из этого множества (например, линейных многочленов в пунктах 1.1-1.3), вид линейной части многочленов (например, линейной части приведенных квадратных многочленов в пунктах 1.1-1.3, где под линейной частью многочлена понимаются слагаемые, содержащие переменную только в первой и нулевой степени), либо какие-то другие свойства или способы описания – придумайте и изучите их сами.

3) Исследуйте вопросы пунктов 1) и 2) в случае, если кроме указанных в них операций можно использовать операции умножения многочленов *f*(*x*)⋅*g*(*x*) и(или) композиции многочленов в любой последовательности *f*(*g*(*x*)) и *g*(*f*(*x*)).

Кроме указанных частных случаев в пунктах 1.1-1.3 попробуйте рассмотреть многочлены более высоких степеней, например,

3.1. *f*1(*x*) = *х*3 – 3*х*2 + 5 и *f*2(*x*) *= х*2 – 4. Можно ли в этих случаях после нескольких операций получить многочлен вида *хn* – 1?

3.2. Та же задача для других многочленов степеней 3 и 1 или 3 и 2. Привести примеры, когда ответ на вопрос пункта 3.1 положительный, и когда – нет.

4) Решить аналогичные задачи для многочленов произвольных степеней.

5) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.